

Barisan, Rekursi dan Relasi Rekurens

Bagian 2

(Update 2026)

Bahan Kuliah IF2120 Matematika Diskrit

Oleh: Rinaldi M

Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika (STEI)
ITB

Relasi Rekurens

- Sebagaimana dijelaskan sebelumnya, barisan (*sequence*) $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ dilambangkan dengan $\{a_n\}$
- Elemen barisan ke- n , yaitu a_n , dapat ditentukan dari suatu formula atau persamaan.
- Bila persamaan yang mengekspresikan a_n dinyatakan secara rekursif dalam satu atau lebih *term* elemen sebelumnya, yaitu $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, maka persamaan tersebut dinamakan **relasi rekurens**.

Contoh: $a_n = 2a_{n-1} + 1$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

- **Kondisi awal** (*initial conditions*) suatu barisan adalah satu atau lebih nilai yang diperlukan untuk memulai menghitung elemen-elemen selanjutnya.

Contoh: $a_n = 2a_{n-1} + 1; a_0 = 1$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 2$$

- Karena relasi rekurens menyatakan definisi barisan secara rekursif, maka kondisi awal merupakan langkah basis pada definisi rekursif tersebut.

- **Contoh 13.** Barisan Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

dapat dinyatakan dengan relasi rekurens

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} ; f_0 = 0 \text{ dan } f_1 = 1$$

- Kondisi awal secara unik menentukan elemen-elemen barisan. Kondisi awal yang berbeda akan menghasilkan elemen-elemen barisan yang berbeda pula.

- Solusi dari sebuah relasi rekurens adalah sebuah formula yang tidak melibatkan lagi *term* rekursif. Formula tersebut memenuhi relasi rekurens yang dimaksud.
- **Contoh 14:** Misalkan $\{a_n\}$ adalah barisan yang memenuhi relasi rekurens berikut:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \quad ; a_0 = 0 \text{ dan } a_1 = 3?$$

Periksa apakah $a_n = 3n$ merupakan solusi relasi rekurens tersebut.

$$\begin{aligned} \text{Penyelesaian: } 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2[3(n-1)] - 3(n-2) \\ &= 6n - 6 - 3n + 6 \\ &= 3n = a_n \end{aligned}$$

Jadi, $a_n = 3n$ merupakan solusi dari relasi rekurens tersebut.

- Apakah $a_n = 2^n$ merupakan solusi relasi rekurens

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} ; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 2?$$

$$\begin{aligned}\text{Penyelesaian: } 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-2} \\ &= 2^{n-1+1} - 2^{n-2} \\ &= 2^n - 2^{n-2} \neq 2^n\end{aligned}$$

Jadi, $a_n = 2^n$ bukan merupakan solusi relasi rekurens tsb.

Cara lain: Karena $a_0 = 1$ dan $a_1 = 2$, maka dapat dihitung

$$a_2 = 2a_1 - a_0 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Dari rumus $a_n = 2^n$ dapat dihitung $a_0 = 2^0 = 1$,

$$a_1 = 2^1 = 2, \text{ dan } a_2 = 2^2 = 4$$

Karena $3 \neq 4$, maka $a_n = 2^n$ bukan merupakan solusi dari relasi rekurens tsb.

Pemodelan dengan Relasi Rekurens

1. Bunga majemuk.

Contoh 15. Misalkan uang sebanyak Rp10.000 disimpan di bank dengan sistem bunga berbunga dengan besar bunga 11% per tahun. Berapa banyak uang setelah 30 tahun?

Misalkan P_n menyatakan nilai uang setelah n tahun. Nilai uang setelah n tahun sama dengan nilai uang tahun sebelumnya ditambah dengan bunga uang:

$$P_n = P_{n-1} + 0,11 P_{n-1} ; P_0 = 10.000$$

- Solusi relasi rekurens $P_n = P_{n-1} + 0,11 P_{n-1}$; $P_0 = 10.000$ dapat dipecahkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + 0,11 P_{n-1} = (1,11) P_{n-1} \\ &= (1,11) [(1,11) P_{n-2}] = (1,11)^2 P_{n-2} \\ &= (1,11)^2 [(1,11) P_{n-3}] = (1,11)^3 P_{n-3} \\ &= \dots \\ &= (1,11)^n P_0 \end{aligned}$$

Jadi, $P_n = (1,11)^n P_0 = 10.000 (1,11)^n$

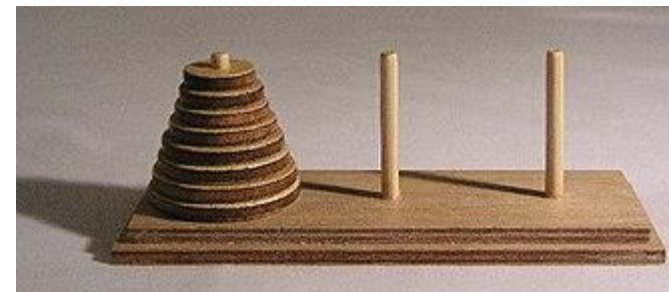
Setelah 30 tahun, banyaknya uang adalah

$$P_{30} = 10.000 (1,11)^{30} = \text{Rp}228.922,97$$

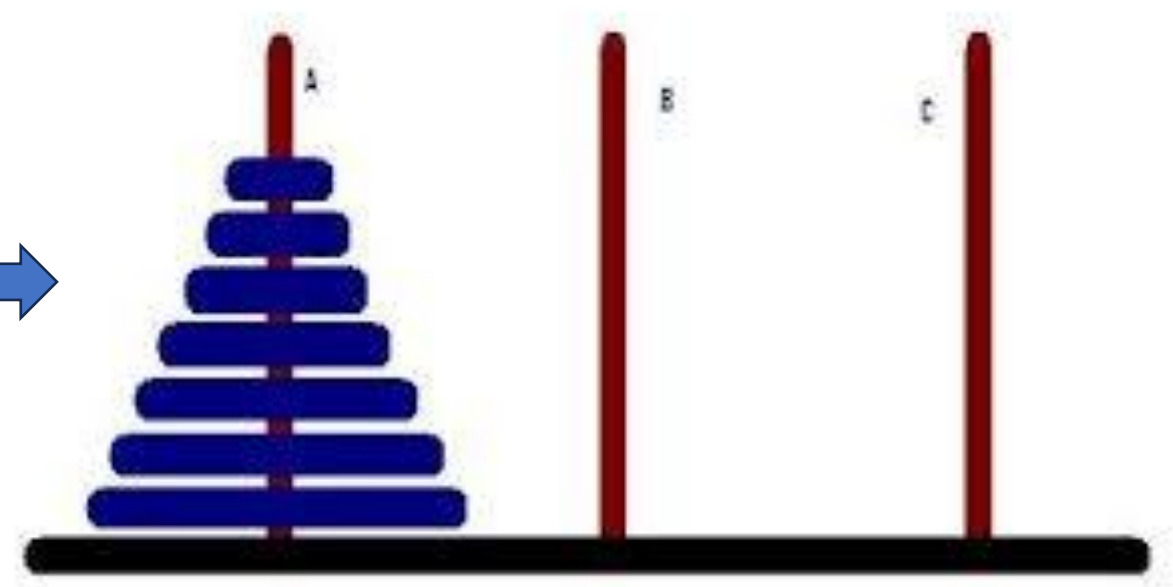
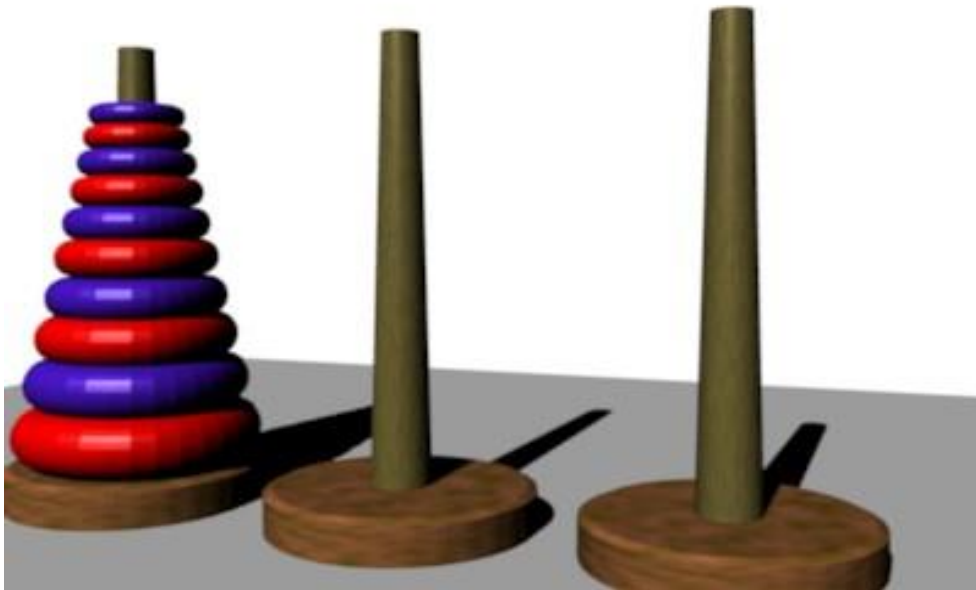
2. Menara Hanoi (*The Tower of Hanoi*)

Contoh 16. Menara Hanoi adalah sebuah *puzzle* yang terkenal pada akhir abad 19. Puzzle ini ditemukan oleh matematikawan Perancis, Edouard Lucas.

Dikisahkan bahwa di kota Hanoi, Vietnam, terdapat tiga buah tiang tegak setinggi 5 meter dan 64 buah cakram (*disk*) berbentuk lingkaran dari berbagai ukuran. Tiap cakram mempunyai lubang di tengahnya yang memungkinkannya untuk dimasukkan ke dalam tiang. Pada mulanya semua cakram tersebut tersusun pada sebuah tiang sedemikian rupa sehingga cakram yang di bawah mempunyai diameter lebih besar daripada diameter cakram di atasnya. Pendeta Budha memberi pertanyaan kepada murid-muridnya: Bagaimana cara memindahkan seluruh cakram tersebut ke sebuah tiang yang lain; setiap kali hanya satu cakram yang boleh dipindahkan, tetapi tidak boleh cakram yang lebih besar berada di atas cakram yang lebih kecil. Tiang yang satu lagi dapat dipakai sebagai tempat peralihan dengan tetap memegang aturan yang telah disebutkan. Menurut legenda pendeta Budha, bila pemindahan seluruh cakram itu berhasil dilakukan, maka dunia akan kiamat!



Pemodelan:

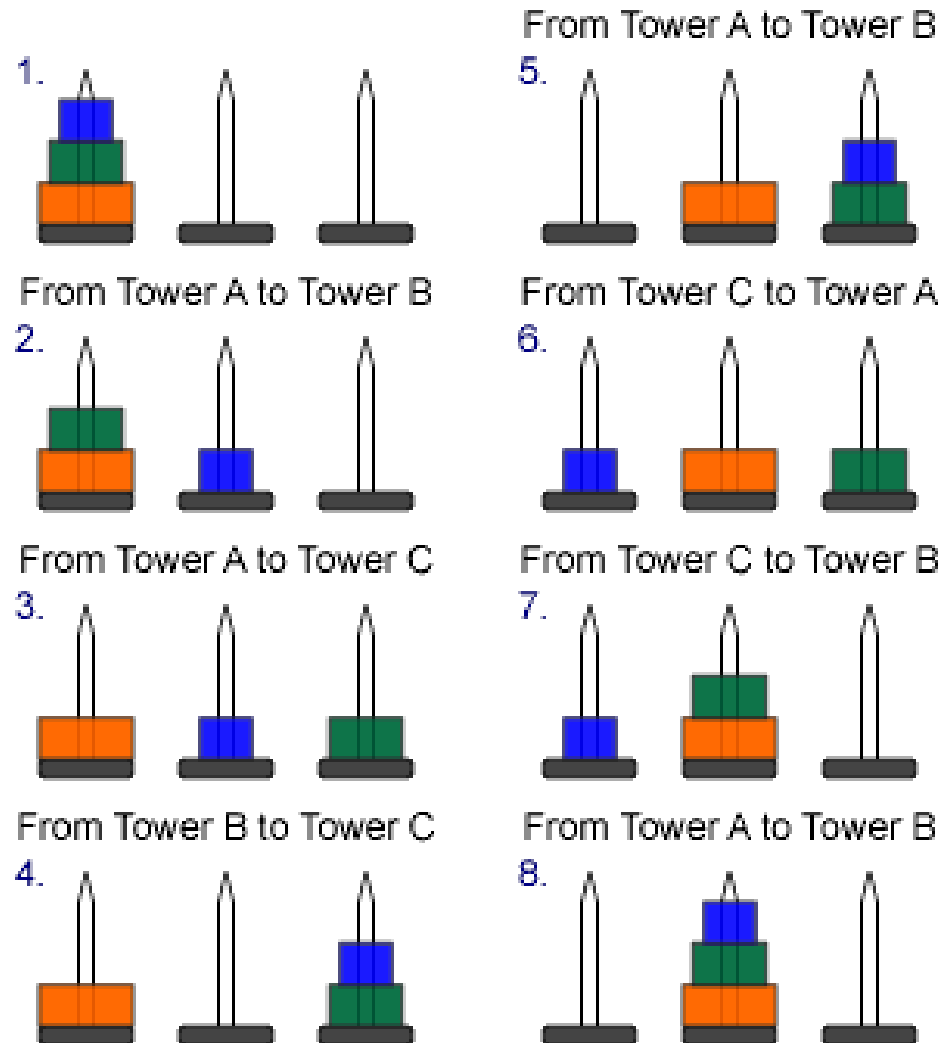


Asal (A)

Tujuan (B)

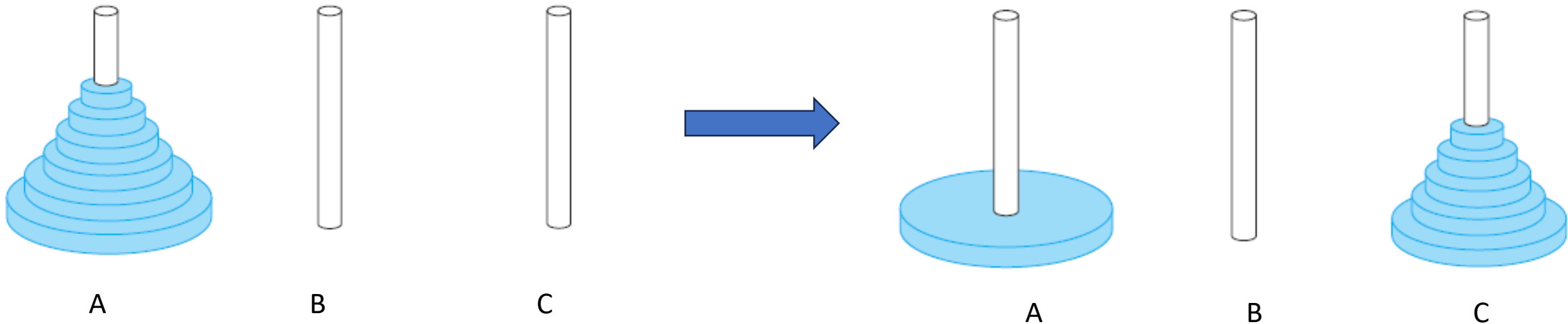
Peralihan (C)

- Kasus untuk $n = 3$ cakram, memindahkan semua piringan lebih mudah dilakukan:



- Secara umum, untuk n cakram, penyelesaian dengan cara berpikir rekursif adalah sebagai berikut:

Kita harus memindahkan cakram paling bawah terlebih dahulu ke tiang B sebagai alas bagi cakram yang lain. Untuk mencapai maksud demikian, **berpikirlah secara rekursif** sbb: pindahkan $n - 1$ cakram teratas dari A ke C , lalu pindahkan cakram paling bawah dari A ke B , lalu pindahkan $n - 1$ cakram dari C ke B .



Proses pemindahan n buah cakram secara rekursif dirumuskan sebagai berikut:

pindahkan $n - 1$ cakram dari A ke C

pindahkan 1 cakram dari A ke B

pindahkan $n - 1$ cakram dari C ke B

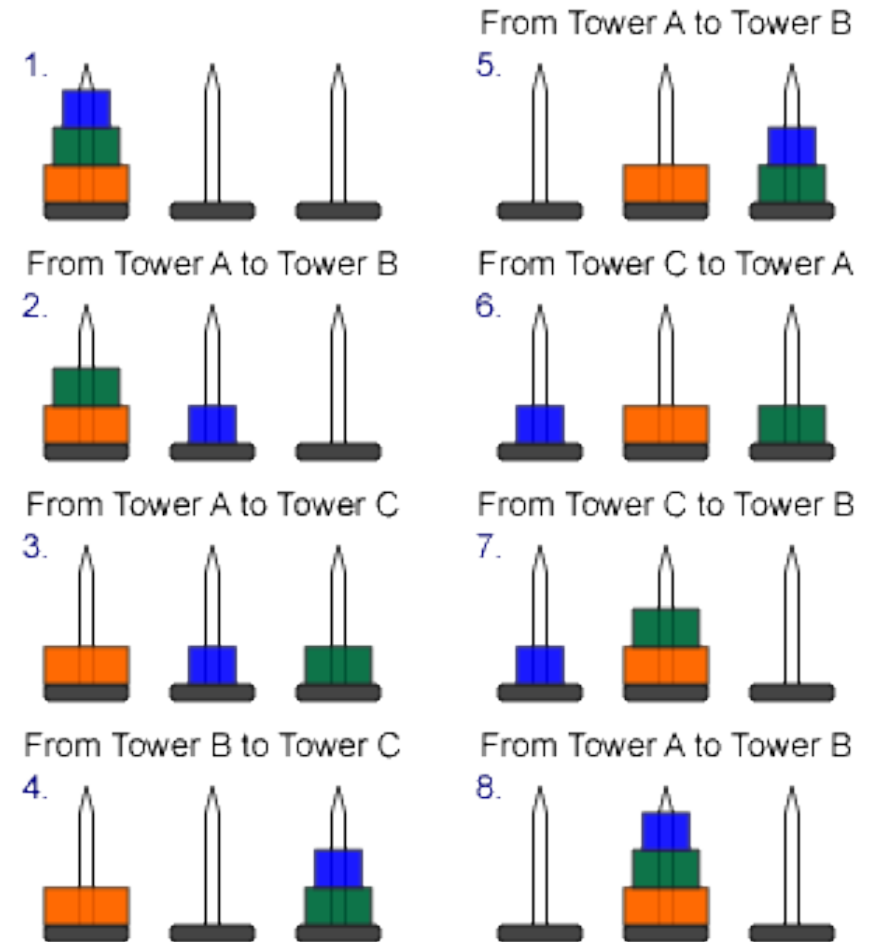
Selanjutnya dengan tetap berpikir rekursif-pekerjaan memindahkan $n - 1$ cakram dari sebuah tiang ke tiang lain dapat dibayangkan sebagai memindahkan $n - 2$ cakram antara kedua tiang tersebut, lalu memindahkan cakram terbawah dari sebuah tiang ke tiang lain, begitu seterusnya.

- Kode program Python Menara Hanoi

```
def HANOI(n, asal, tujuan, peralihan):  
    if n == 1:  
        print("Pindahkan cakram dari", asal, "ke", tujuan)  
    else:  
        HANOI(n-1, asal, peralihan, tujuan)  
        print("Pindahkan cakram dari", asal, "ke", tujuan)  
        HANOI(n-1, peralihan, tujuan, asal)
```

```
HANOI(3, "A", "B", "C")
```

```
Pindahkan cakram dari A ke B  
Pindahkan cakram dari A ke C  
Pindahkan cakram dari B ke C  
Pindahkan cakram dari A ke B  
Pindahkan cakram dari C ke A  
Pindahkan cakram dari C ke B  
Pindahkan cakram dari A ke B
```



- Misalkan H_n menyatakan jumlah perpindahan cakram yang dilakukan untuk memecahkan teka-teki Menara Hanoi.

pindahkan $n - 1$ cakram dari A ke C $\rightarrow H_{n-1}$ kali

pindahkan 1 cakram dari A ke B $\rightarrow 1$ kali

pindahkan $n - 1$ cakram dari C ke B $\rightarrow H_{n-1}$ kali

Maka jumlah seluruh perpindahan yang terjadi adalah:

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

dengan kondisi awal $H_1 = 1$

- Penyelesaian relasi rekurens:

$$\begin{aligned}H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\&= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\&= 2^2 (2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\&\quad \dots \\&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \\&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \rightarrow \text{deret geometri} \\&= 2^n - 1\end{aligned}$$

- Untuk $n = 64$ cakram, jumlah perpindahan cakram yang terjadi adalah

$$H_{64} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

- Jika satu kali pemindahan cakram membutuhkan waktu 1 detik, maka waktu yang diperlukan adalah

18.446.744.073.709.551.615 detik

atau setara dengan 584.942.417.355 tahun atau sekitar 584 milyar tahun!

- Karena itu, legenda yang menyatakan bahwa dunia akan kiamat bila orang berhasil memindahkan 64 buah cakram pada menara Hanoi ada juga benarnya, karena 584 milyar tahun adalah waktu yang sangat-sangat lama, dunia semakin tua, dan akhirnya hancur. *Wallahualam*



Penyelesaian Relasi Rekurens

- Relasi rekurens dapat diselesaikan secara iteratif atau dengan metode yang sistematis.
- Secara iteratif misalnya penyelesaian pada contoh bunga majemuk (Contoh 15) dan Menara Hanoi (Contoh 16).
- Penyelesaian secara sistematis adalah untuk relasi rekurens yang berbentuk **homogen linjar** (*linear homogeneous*). Untuk yang non-homogen tidak dibahas.
- Relasi rekurens dikatakan homogen linjar jika berbentuk

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

yang dalam hal ini $c_1, c_2, \dots, c_k$ adalah bilangan riil dan $c_k \neq 0$.

- **Contoh 17.** Perhatikan mana relasi rekurens homogen linjar dan relasi yang bukan homogen linjar

$$P_n = (1, 11) P_{n-1} \rightarrow \text{homogen linjar}$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \rightarrow \text{homogen linjar}$$

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}^2 \rightarrow \text{tidak homogen linjar, karena ada suku kuadrat}$$

$$H_n = 2H_{n-1} - 1 \rightarrow \text{tidak homogen linjar, karena suku berbentuk konstanta (-1)}$$

$$a_n = na_{n-1} \rightarrow \text{tidak homogen linjar, karena koefisiennya bukan konstanta}$$

- Contoh penggunaan relasi rekurens berbentuk homogen linier di dalam program rekursif:

```
def f(n) :  
    if n <= 1 :  
        return 1  
    else :  
        return f(n-1) + f(n-2)
```

Jumlah operasi tambah (+), dinyatakan sebagai $T(n)$, di dalam fungsi rekursif di atas berbentuk relasi rekurens homogen linier:

$$T(n) = T(n - 1) + T(n - 2); T(0) = 1, T(1) = 1$$

Solusi Relasi Rekurens

- Solusi relasi rekurens yang berbentuk homogen linier adalah persamaan yang tidak mengandung bagian rekurens lagi, yaitu mencari persamaan berbentuk

$$a_n = r^n$$

yang dalam hal ini r adalah konstanta.

- Untuk mencari persamaan tersebut, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:
(i) Sulihkan $a_n = r^n$ ke dalam relasi rekuren homogen linier,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

menjadi

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}$$

(ii) Bagi kedua ruas dengan r^{n-k} ,

$$\frac{r^n}{r^{n-k}} = \frac{c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}}{r^{n-k}}$$

menghasilkan $r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_{k-1} r + c_k$, atau dalam bentuk ruas kanan sama dengan 0:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

- Persamaan di atas dinamakan **persamaan karakteristik** dari relasi rekurens.
- Solusi persamaan karakteristik disebut **akar-akar karakteristik**, dan merupakan komponen solusi relasi rekurens yang kita cari ($a_n = r^n$).

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

- Untuk relasi rekurens homogen linier derajat $k = 2$,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

persamaan karakteristiknya berbentuk:

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

Akar persamaan karakteristik adalah r_1 dan r_2 .

- **Teorema 1:** Misalkan c_1 dan c_2 adalah bilangan riil. Misalkan $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ memiliki dua akar berbeda, yaitu r_1 dan r_2 . Maka, barisan $\{a_n\}$ adalah solusi relasi rekurens $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ jika dan hanya jika $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots$ dengan α_1 dan α_2 adalah konstan.

- **Contoh 18.** Tentukan solusi relasi rekurens berikut:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} ; a_0 = 2 \text{ dan } a_1 = 7?$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik: $r^2 - r - 2 = 0$.

Akar-akarnya: $(r - 2)(r + 1) = 0 \rightarrow r_1 = 2 \text{ dan } r_2 = -1$

Solusi relasi rekurens: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \rightarrow a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$

Sulihkan: $a_0 = 2 \rightarrow a_0 = 2 = \alpha_1 2^0 + \alpha_2 (-1)^0 = \alpha_1 + \alpha_2$

$a_1 = 7 \rightarrow a_1 = 7 = \alpha_1 2^1 + \alpha_2 (-1)^1 = 2\alpha_1 - \alpha_2$

Diperoleh dua persamaan: $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$ dan $2\alpha_1 - \alpha_2 = 7$,
solusinya adalah $\alpha_1 = 3$ dan $\alpha_2 = -1$

Jadi, solusi relasi rekurens adalah:

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$$

- Jika persamaan karakteristik memiliki dua akar yang sama (akar kembar, $r_1 = r_2$), maka Teorema 1 tidak dapat dipakai. Terapkan Teorema 2 berikut ini.
- **Teorema 2:** Misalkan $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ mempunyai akar kembar, misalkan r_0 . Barisan $\{a_n\}$ adalah solusi relasi rekurens $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ jika dan hanya jika

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$$

untuk $n = 0, 1, 2, \dots$, dengan α_1 dan α_2 adalah konstan.

- **Contoh 19.** Tentukan solusi relasi rekurens berikut:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} ; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 6?$$

Penyelesaian:

Penyelesaian:

Relasi rekurens: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$; $a_0 = 1$ dan $a_1 = 6$?

Persamaan karakteristik: $r^2 - 6r + 9 = 0$.

Akar-akarnya: $(r - 3)(r - 3) = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 3 \rightarrow r_0$

Solusi persamaan rekurens adalah

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n \rightarrow a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

Sulihkan:

$$a_0 = 1 \rightarrow a_0 = 1 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = \alpha_1$$

$$a_1 = 6 \rightarrow a_1 = 6 = \alpha_1 3^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 3^1 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2$$

Diperoleh dua persamaan:

$$\alpha_1 = 1 \text{ dan } 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6,$$

solusi kedua persamaan tersebut adalah $\alpha_1 = 1$ dan $\alpha_2 = 1$

Jadi, solusi relasi rekurens adalah $a_n = 3^n + n3^n$

- **Teorema 3 (perampatan):** Misalkan $c_1, c_2, \dots, c_k$ adalah bilangan riil. Misalkan persamaan karakteristik

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

memiliki k akar berbeda, yaitu $r_1, r_2, \dots, r_k$. Maka, barisan $\{a_n\}$ adalah solusi relasi rekurens

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

jika dan hanya jika

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$$

untuk $n = 0, 1, 2, \dots$ dengan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ adalah konstan.

Contoh 20. Tentukan solusi relasi rekurens $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ dengan kondisi awal $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, and $a_2 = 15$.

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik relasi rekurens tersebut adalah

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6.$$

Faktorkan: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r - 1)(r - 2)(r - 3)$. Akar-akarnya adalah $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, dan $r_3 = 3$

Solusi persamaan rekurens tersebut adalah $a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$.

Sulihkan:

$$a_0 = 2 \rightarrow 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

$$a_1 = 5 \rightarrow 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3,$$

$$a_2 = 15 \rightarrow 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9.$$

Selesaikan tiga persamaan simultan di atas dengan teknik eliminasi, diperoleh

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \text{ dan } \alpha_3 = 2.$$

Jadi, solusi relasi rekurens tersebut adalah

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

- **Teorema 4 (perampatan, kasus ada akar yang sama):**

Let $c_1, c_2, \dots, c_k$ be real numbers. Suppose that the characteristic equation

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0$$

has t distinct roots $r_1, r_2, \dots, r_t$ with multiplicities $m_1, m_2, \dots, m_t$, respectively, so that $m_i \geq 1$ for $i = 1, 2, \dots, t$ and $m_1 + m_2 + \dots + m_t = k$. Then a sequence $\{a_n\}$ is a solution of the recurrence relation

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

if and only if

$$\begin{aligned} a_n = & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \dots + \alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n \\ & + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n + \dots + \alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n \\ & + \dots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}n + \dots + \alpha_{t,m_t-1}n^{m_t-1})r_t^n \end{aligned}$$

for $n = 0, 1, 2, \dots$, where $\alpha_{i,j}$ are constants for $1 \leq i \leq t$ and $0 \leq j \leq m_i - 1$.

(Sumber: Rosen)

Latihan (Kuis 2020)

Tentukan solusi relasi rekurens $a_n = -2a_{n-1} + 8a_{n-2}; a_0 = 4; a_1 = 3$

(Jawaban pada halaman berikut)

Jawaban:

Persamaan Karakteristik: $r^2 + 2r - 8 = 0$

Akar-akarnya: $(r + 4)(r - 2) = 0 \rightarrow r_1 = -4 ; r_2 = 2$

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \rightarrow \alpha_1 (-4)^n + \alpha_2 2^n$$

$$a_0 = 4 \rightarrow \alpha_1 (-4)^0 + \alpha_2 2^0 = 4$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \dots (1)$$

$$a_1 = 3 \rightarrow \alpha_1 (-4)^1 + \alpha_2 2^1 = 3$$

$$-4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \dots (2)$$

Dengan eliminasi persamaan (1) dan (2), diperoleh solusinya adalah

$$\alpha_1 = 5/6 \text{ dan } \alpha_2 = 19/6.$$

Jadi, solusi relasi rekurensnya adalah

$$a_n = \frac{5}{6} (-4)^n + \frac{19}{6} 2^n$$

Latihan (Kuis 2021)

Ibu Miranda menyebarkan suatu spesies jamur invasive bernama *Megamycete* pada suatu desa di Eropa. Spesies jamur ini menginfeksi manusia-manusia yang ada di desa tersebut dan membuat mereka bermutasi menjadi monster yang dapat menginfeksi manusia lainnya. *Megamycete* terus menyebar dengan banyaknya orang yang tertular bertambah sebesar 25% setiap bulannya. Jika pada awalnya Ibu Miranda menginfeksi 300 orang, maka tentukanlah

- a) Relasi rekursif P_n yang merepresentasikan banyaknya orang yang terinfeksi *Megamycete* pada bulan ke- n .
- b) Solusi dari P_n dengan metode pemecahan relasi rekurs homogen linier.
- c) Berapa banyak orang yang terinfeksi *Megamycete* pada bulan ke-5? Gunakan pembulatan ke atas jika dibutuhkan.

Penyelesaian:

$$(a) \quad P_n = \begin{cases} 300, & n = 0 \\ P_{n-1} + 0.25P_{n-1}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$(b) \quad P_n = P_{n-1} + 0.25P_{n-1} = 1.25P_{n-1}$$

Persamaan karakteristik: $r - 1.25 = 0$, diperoleh $r = 1.25$

$$P_n = \alpha_1 r_1^n$$

$$P_n = \alpha_1 1.25^n$$

$$P_0 = 300 \rightarrow \alpha_1 1.25^0 = 300 \rightarrow \alpha_1 = 300$$

$$\text{Jadi, } P_n = 300(1.25)^n$$

$$(c) \quad P_5 = 300(1.25)^5 = 915.5, \text{ dibulatkan ke atas menjadi 916 orang.}$$

Latihan (Kuis 2022)

Doraemon sangat suka makan kue dorayaki. Namun karena ia tidak memiliki banyak uang, ia hanya dapat membeli 3 dorayaki per bulan. Namun karena ia sangat suka kue tersebut, ia akhirnya memutuskan untuk membeli 3 buah kue dorayaki dan memasukkannya ke alat pengganda barang. Alat tersebut akan menggandakan barang secara rekursif dengan relasi rekurens: $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ dengan $n = \text{hari}$. Jika pada awalnya (hari ke-0) doraemon memiliki 3 kue dorayaki dan pada hari ke-1 ia memiliki 5 kue dorayaki, tentukan jumlah kue dorayaki yang ia miliki setelah 10 hari.

Penyelesaian:

Relasi rekurens: $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$; $a_0 = 3, a_{01} = 5$

Persamaan karakteristik : $r^2 - 2r - 3 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik: $(r - 3)(r + 1) = 0$ adalah $r_1 = 3$ dan $r_2 = -1$

Solusi relasi rekurens: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \rightarrow a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 (-1)^n$

Sulihkan:

$$a_0 = 3 \rightarrow \alpha_1 3^0 + \alpha_2 (-1)^0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 3$$

$$a_1 = 5 \rightarrow \alpha_1 3^1 + \alpha_2 (-1)^1 = 3\alpha_1 - \alpha_2 = 5$$

Sistem persamaan:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 3$$

$$3\alpha_1 - \alpha_2 = 5$$

memiliki solusi $\alpha_1 = 2$ dan $\alpha_2 = 1$

Jadi solusi relasi rekurens adalah $a_n = 2 \cdot 3^n + 1 \cdot (-1)^n$

Total kue dorayaki pada hari ke-10 adalah $a_{10} = (2)(59049) + 1 = 118099$

Latihan. Selesaikan relasi rekurens berikut:

(a) $a_n = 2a_{n-1}$; $a_0 = 3$

(b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; $a_0 = 1$ dan $a_1 = 0$

(c) Barisan Fibonacci: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$; $f_0 = 0$ dan $f_1 = 1$

(d) (UTS 2013) Selesaikan relasi rekurens berikut: $T(n) = 7T(n-1) - 6T(n-2)$; dengan nilai awal: $T(0) = 2$, $T(1) = 7$ (Catatan: T_n ditulis sebagai $T(n)$, T_{n-1} ditulis sebagai $T(n-1)$, dst).

Catatan:

Untuk soal Latihan (c) di atas, barisan Fibonacci, solusinya ternyata berupa persamaan dengan bilangan irasional:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Tunjukkan!

TAMAT